# MECANICA

## CINEMATICA

Cinematica lucrează cu noțiunile de *spațiu*, *timp*, şi derivatele lor *viteză* şi *accelerație*.

### Traiectoria şi Vectorul de Poziție

Mişcarea unui punct material este determinată atunci când poziția lui este cunoscută în funcție de timp. Prin mişcarea sa punctul material P descrie o curbă ce constituie ***traiectoria*** mobilului. Dacă poziția punctului material este determinată față de un punct fix O (în general locul unde se află observatorul) mărimea fizică implicată este ***vectorul de poziție***, **r**(t), un vector cu originea în punctul O şi vârful în P unde se găseşte mobilul la momentul respectiv. Dacă ataşăm punctului O un sistem de coordonate Oxyz, *ortogonal*, atunci putem exprima vectorul de poziție sub forma:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cdot x(t) + \mathbf{j}\cdot y(t) + \mathbf{k}\cdot z(t) \qquad (1)$$

unde coordonatele punctului material sunt funcții de timp, iar **i**, **j**, **k** sunt versorii (vectorii unitate) ai celor 3 axe de coordonate.

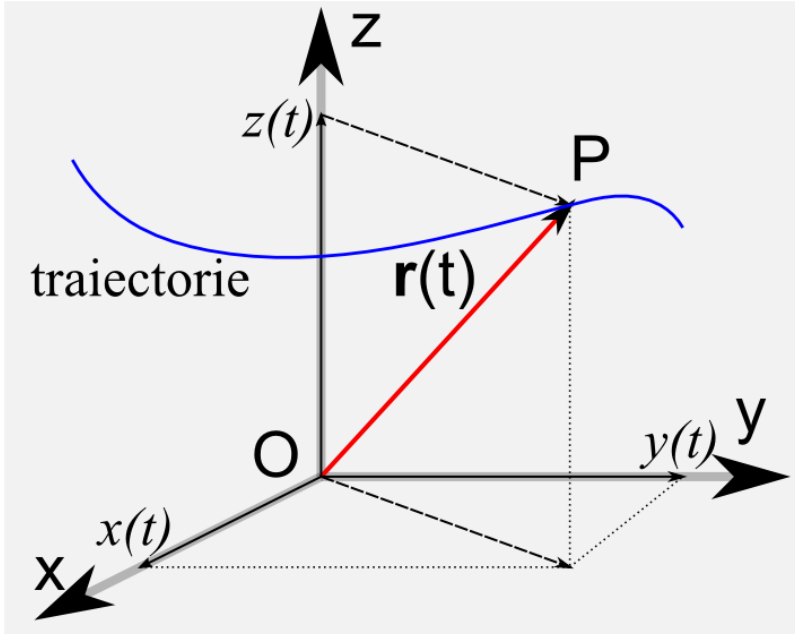
Coordonatele punctului material pot fi aflate ca produs scalar între vectorul de poziție **r**(t) şi versorii axelor:

$$x(t) = \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{i},\ y(t) = \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{j},\ z(t) = \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{k},$$

ținând cont de definiția produsului scalar a doi vectori:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

unde cos(**a**,**b**) este cosinusul unghiului dintre cei doi vectori **a** şi **b**, iar |**a**| şi |**b**| sunt modulele vectorilor **a** şi **b**. Fiindcă $\cos(\pi/2)=0$, produsele **i**·**j**, **j**·**k** şi **k**·**i** sunt nule, iar produsele **i**·**i**, **j**·**j** şi **k**·**k** sunt egale cu 1 fiindcă cos0=1.




### Viteza

***Viteza*** mobilului, definită ca raportul între spațiul parcurs şi intervalul de timp în care a fost parcurs acest spațiu, devine la limita unui interval de timp infinit mic, derivata razei vectoare funcție de timp:

$$\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{i}\cdot v_x + \mathbf{j}\cdot v_y + \mathbf{k}\cdot v_z \qquad [v]_{SI} = m/s \qquad (2)$$

Cunoscând componentele vitezei într-un sistem de coordonate rectangular putem calcula modulul vitezei după relația:

$$|\mathbf{v}| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \qquad (3)$$

datorită faptului că vectorul respectiv este diagonala în paralelipipedul format de cele trei componente.

## Accelerația

Se poate defini ***accelerația*** mobilului ca raport între variația vitezei şi intervalul de timp în care a avut loc această variație. Ca accelerație instantanee, ea este derivata vitezei funcție de timp:

$$\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt \qquad [a]_{SI} = m/s^2 \tag{4}$$

Dacă scriem viteza ca un produs între modulul său şi versorul vitezei **b** atunci accelerația va fi:

$$\mathbf{a} = d(v\cdot\mathbf{b})/dt = \mathbf{b}\cdot dv/dt + v\cdot d\mathbf{b}/dt \tag{5}$$

Primul termen reprezintă accelerația datorată modificării vitezei ca valoare, iar al doilea termen este accelerația datorată modificării direcției vitezei.Ținând cont că **b** este un vector unitate, adică:

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = b^2 = 1 \tag{6}$$

derivând expresia (6) avem:

$$\mathbf{b}\cdot d\mathbf{b}/dt = 0 \tag{7}$$

ceea ce ne spune că vectorul $d\mathbf{b}/dt$ este perpendicular pe vectorul **b**. El va putea fi scris ca:

$$d\mathbf{b}/dt = \mathbf{c}\cdot db/dt \tag{8}$$

unde **c** este versorul direcției perpendiculare pe direcția lui **b**. Ținând cont că:

$$db = |\mathbf{b}|\cdot d\alpha = d\alpha \tag{9}$$

unde $\alpha$ este unghiul cu care se roteşte **b**, atunci spațiul parcurs este:

$$ds = R\cdot d\alpha \tag{10}$$

unde R este raza de curbură a traiectoriei. De aici găsim că:

$$db/dt = d\alpha/dt = (1/R)\cdot(ds/dt) = v/R \tag{11}$$

iar relația (5) devine:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{b}\cdot dv/dt + \mathbf{c}\cdot v^2/R \tag{12}$$

unde primul termen este accelerația tangențială, iar al doilea termen este accelerația normală (perpendiculară pe direcția de mers).

## Legături

Cunoscând accelerația unui corp, prin integrare funcție de timp a acesteia obținem viteza corpului:

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}\cdot dt \tag{13}$$

De exemlu pentru *mişcarea uniform variată* (accelerație constantă **a**) avem:

$$v(t)=at + v_0,$$

unde $v_0$ este viteza inițială a corpului (la t=0s).

Cunoscând viteza unui corp putem determina legea sa de mişcare (legea spațiului) prin integrarea vitezei după timp:

$$\mathbf{s}(t) = \int \mathbf{v}\cdot dt \tag{14}$$

De exemlu pentru *mişcarea uniformă* (viteza este constantă) avem:

$$s(t) = vt + s_0,$$

unde $s_0$ este spațiul inițial (poziția corpului la momentul t=0).

Pentru *mişcarea uniform variată* (accelerație constantă **a**), integrând după timp legea vitezei deja determinată, după avem următoarea lege a spațiului:

$$s(t) = at^2/2+v_0t + s_0.$$

Scoțând timpul din legea vitezei:

$$t=(v-v_0)/a$$

şi înlocuindu-l în legea spațiului:

$$s=a(v-v_0)^2/(2a^2)+v_0(v-v_0)/a+s_0.$$

obținem o legătură directă între poziția corpului şi viteza sa, *legea lui Galilei*:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s-s_0)$$

*Exemple*
Cea mai mare viteză cunoscută este viteza luminii $c=3\cdot10^8$ m/s (300'000 km/s). Ştiind distanţa de la Pământ la Lună $d_{Lună-Pământ}$ = 384'400 km =3,844 $10^8$ m, să se afle în cât timp ajunge la Lună un semnal luminos emis de pe Pământ.

$$t_{Lună-Pământ} = d_{Lună-Pământ}/c = 1{,}281 \text{ s}$$

Ştiind distanţa de la Pământ la Soare $d_{Pământ-Soare}$=1,49597 $10^8$ km ≈ $1{,}5\cdot10^{11}$ m, putem afla după cât timp fotonul emis de Soare ajunge pe Pământ:

$$t_{Soare-Pământ} = d_{Pământ-Soare}/c = 500 \text{ s} = 8{,}3 \text{ min.}$$

Alte date astronomice:

raza Lunii $R_L = 1.738\times10^3$ km

raza Pământului $R_P$ = 6380 km = $6.38\times10^6$ m

raza Soarelui $R_S$ = 695,508 km = $6{,}955\times10^8$ m

Cunoscând **timpul de reacţie** al unui om, ~0.2s, putem afla ce spaţiu parcurge un automobil ce are viteza de 72 km/h până când omul *începe să frâneze*:

$$s=vt = 72 \text{ km/h} \times 0.2\text{s} = 20\text{m/s}\times0{,}2\text{s}=4\text{m}$$

şi ce spaţiu parcurge un obiect în cădere liberă ($v_0$=0m/s, g=9,81m/s²) în acest timp:

$$s=gt^2/2= 9{,}81\cdot0{,}04/2 = 0{,}196 \text{ m.}$$

Aruncări (descompunerea mişcării)
Aflaţi viteza şi unghiul aruncării oblice pentru a atinge $h_{max}$=10m la x=10m de origine.

Din legea Galilei $v_{0y} =(2g\, h_{max})^{1/2}$=14,1 m/s, $t_u= v_{0y}/g$=1.41s, $v_{0x}=x/t_u$=10/1.41=7.09 m/s, $v=(v_{0x}^2 + v_{0y}^2)^{1/2}$=15.8 m/s,
$tg\alpha= v_{0y}/v_{0x}$.= 1.99 [63.3°]

## Mişcarea circulară uniformă

Mişcarea circulară uniformă se caracterizează prin:

1. traiectoria corpului este un cerc (corpul este mereu la aceeaşi distanţă faţă de un punct O, centrul cercului, uzual ales ca origine a sistemului de coordonate);

2. corpul parcurge spaţii egale în intervale de timp egale (are o viteză constantă în modul), respectiv unghiurile măturate de raza vectoare în intervale de timp egale sunt egale (are o viteză unghiulară constantă).

Noţiunile de bază cu care se lucrează sunt:

- **perioada**, T, măsurată în secunde: timpul necesar corpului pentru a parcurge circumferinţa cercului (2πR);
- **frecvenţa**, *f* sau ν (litera grecească "niu"), măsurată în Hertz-i (Hz=1/secundă): numărul de rotaţii efectuate în unitatea de timp;
- **viteza unghiulară**, ω (litera grecească "omega"), măsurată în radiani/secundă: unghiul parcurs în unitatea de timp.

Relaţiile dintre mărimi sunt:

$$f = 1/T$$

$$\omega=d\alpha/dt=2\pi/T=2\pi f, \quad \Rightarrow \quad \alpha=\omega t$$

$$\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt= \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}. \ (v=Rd\alpha/dt=R\omega)$$

Produsul vectorial dintre viteza unghiulară (vector perpendicular pe planul cercului) şi vectorul de poziţie (cu punctul de aplicaţie în centrul cercului) ne dă vectorul viteză. *Produsul vectorial* a doi vectori **a** şi **b** este un vector **c**, cu *modulul* dat de relaţia:

$$c=ab \sin(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

unde (**a**,**b**) este unghiul dintre vectori, *direcţia* lui **c** este perpendiculară pe planul format de vectorii **a** şi **b**, iar *sensul* este dat regula şurubului drept: rotind primul vector peste cel de-al doilea, pe drumul cel mai scurt, obținem sensul de deplasare.

Viteza corpului pe traiectoria circulară este constantă în modul, dar se modifică ca direcție şi din această cauză corpul suferă o accelerație **a**:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}). \qquad (a=\omega^2R)$$

Accelerația este perpendiculară pe viteză, având aceeaşi direcție cu raza, dar sensul către centrul cercului şi de accea se numeşte **accelerație centripetă**.

Pornind de la coordonatele corpului:

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}, \qquad \text{unde: } x=R\cdot\cos(\omega t),\ y=R\cdot\sin(\omega t),$$

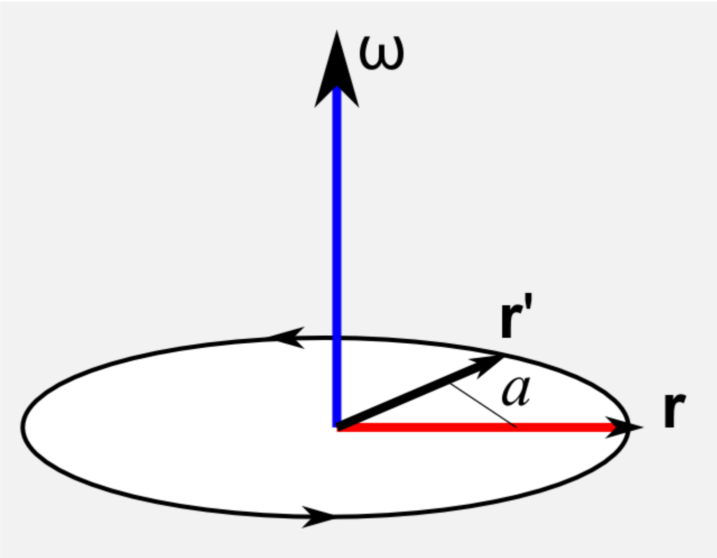
prin derivare obținem viteza:

$$\mathbf{v}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}, \qquad \text{unde: } v_x=-\omega R\cdot\sin(\omega t),\ v_y=\omega R\cdot\cos(\omega t),$$

care derivată după timp ne dă accelerația:

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}, \text{ unde: } a_x=-\omega^2R\cdot\cos(\omega t),\ a_y=-\omega^2R\cdot\sin(\omega t).$$

Fiindcă produsul scalar a doi vectori perpendiculari este zero, se poate arăta prin calcul direct că **v**_|_**r**. şi **a**_|_**v**, deci **a**||**r**.




*Exemple*

Calculează **viteza suprafeței Pământului**. Raza pământului este:

$$R_P = 6380 \text{ km} = 6.38\times10^6 \text{ m}$$

Perioada de rotație în jurul propriei axe este:

$$T=24h=24h\times60min/h\times60sec/min=86{,}4\cdot10^3s,$$

Viteza unui corp aflat pe suprafața Pământului (la Ecuator) va fi:

$$v=2\pi R/T=2\cdot3.14\cdot6{,}4\cdot10^6/86{,}4\cdot10^3=0.4652\cdot10^3= 465 \text{ m/s} = 1675 \text{ km/h}$$

Calculați aceaşi viteză pentru latitudinea de 45°.

Accelerația centripetă va fi neglijabilă față de accelerația gravitațională:

$$a=\omega v =2\pi v/T=6.28\cdot465/86{,}4\cdot10^3=33.8\cdot10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

În mod similar putem calcula **viteza Pământului în jurul Soarelui**, ştiind distanța Soare-Pământ $R_{SP} = 1{,}5\cdot10^{11}$ m, şi perioada de rotație $T=1$ an= $365\times86{,}4\cdot10^3s = 31'536\times10^3s= 3{,}15\times10^7s$:

$$v=2\pi R_{SP}/T= 3\cdot10^4 \text{ m/s} = 1{,}08\cdot10^5 \text{ km/h} = 108'000 \text{ km/h}$$

## *DINAMICA*

Dinamica studiază cauzele mişcării, iar noţiunile ei de bază sunt forţa, lucrul mecanic, energia. La baza dinamicii stau cele 4 legi ale dinamicii, care descriu comportarea corpurilor într-un *sistem de referinţă inerţial*.

### Legile dinamicii (Newton)

***Prima lege a mecanicii*** sau ***legea inerţiei*** "Un punct material este în repaus sau se mişcă pe o traiectorie rectilinie cu viteză constantă dacă asupra sa nu acţionează alte corpuri din exterior." Sistemele de referinţă în care se verifică această afirmaţie se numesc sisteme de referinţă inerţiale.

Această lege se poate enunţa cu ajutorul noţiunii de impuls în felul următor: "În absenţa oricărei forţe, impulsul corpului rămâne constant". Legea inerţiei este deci o lege de conservare a impulsului.

***Impulsul*** unui corp este produsul dintre masa corpului şi viteza sa:

$$\mathbf{p} = m\cdot\mathbf{v} \qquad [\mathbf{p}]_{SI} = kg\cdot m/s \qquad (1)$$

***A doua lege a mecanicii*** sau ***legea forţei*** devine: "Derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu forţa ce acţionează asupra corpului."

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt \qquad [F]_{SI} = kg\cdot m/s^2 = N \text{ (Newton)} \qquad (2)$$

În cazul în care masa este constantă ca funcţie de viteză (mecanica clasică) atunci (16) devine:

$$\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{a} \qquad (3)$$

Astfel a doua lege a dinamicii, ***legea lui Newton***, devine: "O forţă acţionând asupra unui corp îi imprimă o acceleraţie direct proporţională cu forţa şi invers proporţională cu masa acestuia."

***A treia lege a mecanicii*** sau ***legea egalităţii acţiunilor reciproce*** "Forţa cu care acţionează un corp A asupra corpului B este egală în modul şi de sens contrar forţei cu care acţionează corpul B asupra corpului A."

***A patra lege a mecanicii*** sau ***legea superpoziţiei forţelor*** "Fiecare din forţele aplicate asupra unui corp acţionează independent de existenţa celorlalte forţe."

O consecinţă importantă a acestei legi este că putem studia mişcarea corpului ca şi cum asupra sa ar acţiona o singură forţă, forţa rezultată prin compunerea tuturor forţelor ce acţionează asupra corpului.

*Exemple*

**Mişcarea orizontală cu frecare**.
Un corp cu masa m=1000 kg se mişcă pe o suprafaţă orizontală cu coeficientul de frecare $\mu$=0,1 şi are viteza iniţială de $v_o$ = 72km/h (20m/s). Ştiind acceleraţia gravitaţională, g= 9,81 m/s$^2$, aflaţi acceleraţia corpului şi spaţiul parcurs până la oprire.

Corpul prin greutatea sa G=mg acţionează asupra suprafeţei pe care se mişcă, iar aceasta reacţionează cu o forţă egală în modul, dar de sens contrar (L3 a acţiunii şi reacţiunii):

$$N=G=mg \qquad (\mathbf{N}=-\mathbf{G} \ \_|\_ \text{ pe suprafaţa de sprijin})$$

Din această cauză pe direcţia verticală suma forţelor care acţionează asupra corpului este zero (**N**+**G**=0) şi implicit acceleraţia pe această direcţie va fi zero (L2 a forţei).

Pe direcţia orizontală va acţiona doar forţa de frânare:

$$F_r = \mu N = \mu mg$$

în sens opus deplasării (vitezei). Atunci putem calcula acceleraţia corpului din legea a doua a dinamicii:

$$a = \sum F/m = \mu mg/m = \mu g$$

Putem acum să scriem legea vitezei şi a spaţiului:

$$v(t)=v_o - \mu gt \quad s(t)= v_o t - \mu gt^2/2$$

şi apoi să calculăm timpul până la oprire:

$$v=0 \Rightarrow v_o - \mu g t=0 \Rightarrow t_o = v_o/(\mu g)$$

şi spaţiul parcurs până la oprire:

$$s(t_o)=s_o= v_o^2/(2\mu g)$$

Aceste relaţii sunt utile în studiul sistemului de frânare de la automobile ABS-Antilock Braking Systems. Sistemul se bazează pe diferenţa dintre coeficienţii de frecare statici (fără alunecare) şi cei cinetici (cu alunecare).

**Tabel pentru coeficienţii de frecare** *statici* ($\mu_s$) şi *cinetici* ($\mu_c$)

| Suprafeţe în contact | $\mu_s$ | $\mu_c$ |
|---|---|---|
| Metal pe metal (lubrifiat) | 0.15 | 0.06 |
| Oţel pe oţel | 0.74 | 0.57 |
| Cauciuc pe beton uscat | 1.0 (0.9) | 0.8 (0.7) |
| Sticlă pe sticlă | 0.94 | 0.4 |
| Teflon pe teflon | 0.04 | 0.04 |
| Grafit pe grafit | - | 0.1 |
| Os pe os (uscat) | - | 0.3 |
| Articulaţii umane (lubrifiate) | 0.01 | 0.003 |

Pentru cazul automobilelor, suprafeţele în contact sunt cauciucul anvelopelor şi betonul şoselei. Coeficientul de frecare static este $\mu_s$=1, iar cel cinematic este $\mu_c=\mu_s-0.2=0,8$. Dacă la frânare roţile nu alunecă atunci spaţiul de frânare este:

$$s'= v_o^2/(2\ \mu_s\ g) \approx 20^2/(2\cdot 1\cdot 10)=20\text{m}\ (v_o=72\text{km/h}=20\text{m/s})$$

Dacă la frânare roţile alunecă atunci spaţiul de frânare este:

$$s''=v_o^2/(2\ \mu_c\ g)\approx 20^2/(2\cdot 0.8\cdot 10)=25\text{m}\ (v_o=72\text{km/h})$$

Folosind sistemul ABS se scurtează cu $s''-s'$=5m spaţiul de frânare, la viteza de 72km/h. Dacă viteza iniţială se dublează ($v_o$ = 144 km/h), atunci spaţiile de frânare cresc de 4 ori ($\sim v_0^2$), inclusiv scurtarea spaţiului de frânare creşte de 4 ori ($s''-s'$= 20m)!

**Forţă de frânare proporţională cu viteza** ($\mathbf{F}_r = -k\mathbf{v}$)

Un corp este acţionat de o forţă constantă (forţa de greutate) G=mg şi o forţă de frânare $F_r = kv$ proporţională cu viteza. Găsiţi legea vitezei şi a spaţiului.

Aplicăm legea forţei:

$$ma = mg - kv \Rightarrow dv/dt = g - v\cdot k/m = (k/m)[(mg/k)-v]$$

Separăm variabilele "v" şi "t" şi integrăm:

$$\int dv/[(mg/k)-v]=\int(k/m)\, dt \qquad \Rightarrow$$

$$-\ln[(mg/k)-v] + \ln C = (k/m)\cdot t$$

Punând condiţia iniţială v = 0 la t = 0, avem $\ln C = \ln(mg/k)$ de unde:

$$\ln\{[(mg/k)-v]/(mg/k)\} = -t(k/m)$$

sau exponenţiind avem:

$$[(mg/k)-v]/(mg/k) = e^{-t\,k/m} \qquad v(t) = (mg/k)(1-e^{-t\,k/m})$$

Notând v' = mg/k şi $\tau$=m/k relaţia vitezei devine:

$$v(t) = v'\cdot(1-e^{-t/\tau})$$

Ştiind că: $e^{-1} = 0,3678;\ 1-e^{-1} = 0,632= 63\%$
$e^{-2} = 0,135;\ 1-e^{-2} = 0,864= 86\%$
$e^{-3} = 0,0498;\ 1-e^{-3} = 0,950= 95\%$
$e^{-4} = 0,018;\ 1-e^{-4} = 0,982= 98\%$

tragem concluzia că după 3 constante de timp $\tau$, mobilul atinge practic viteza sa limită v', mişcându-se în continuare uniform.

Frânarea proporţională cu viteza este caracteristică mişcării corpurilor cu viteză mică în fluide vâscoase. Forţa de frânare a unei sfere de rază r şi densitate $\rho$, care se mişcă cu viteza v, într-un fluid de densitate $\rho'$ şi coeficient de vâscozitate $\eta$ ($[\eta]_{SI}$ = kg/(s·m)) este :

$$f = 6\cdot\pi\cdot\eta\cdot r\cdot v \quad \text{(legea lui Stokes)}$$

La limită, când sfera se mişcă uniform sub acţiunea forţei de greutate, a forţei arhimedice orientată în sens contrar greutăţii şi a forţei de frânare, avem egalitatea:

$$6\cdot\pi\cdot\eta\cdot r\cdot v' = (4/3)\cdot\pi\cdot r^3\cdot g\cdot(\rho-\rho')$$

din care putem deduce coeficientul de vâscozitate măsurând viteza limită v'.

**Forţă de frânare proporţională cu pătratul vitezei** ($F_r = kv^2$)
Un corp este acţionat de o forţă constantă (forţa de greutate) G = mg şi o forţă de frânare $F_r = kv^2$ proporţională cu pătratul vitezei. Găsiţi legea vitezei şi a spaţiului.

Aplicăm legea forţei:

$$ma = mg - kv^2 \Rightarrow \quad a\cdot(m/k) = (mg/k) - v^2$$

Notăm viteza maximă a corpului când a=0 cu v':

$$mg/k = v'^2,$$

de unde:

$$(dv/dt)\,(m/k) = v'^2 - v^2 = (v'-v)(v'+v)$$

Separăm variabilele v şi t:

$$\Rightarrow \quad dv/[(v'-v)(v'+v)] = (k/m)\cdot dt$$

şi ţinând cont că :

$$1/[(v'-v)(v'+v)] = (1/2v')[1/(v'-v) + 1/(v'+v)]$$

putem scrie că:

$$dv/(v'-v) + dv/(v'+v) = dt\,(2v'k/m)$$

Introducem notaţia $\tau$ pentru *constanta de timp* caracteristică mişcării:

$$\tau = m/(2v'k) = (1/2)\cdot[m/(k\cdot g)]^{1/2}$$

avem:

$$\int dv/(v'-v) + \int dv/(v'+v) = \int dt/\tau$$

După integrare cu condiţia iniţială v = 0 la t = 0, avem:

$$\ln[(v'+v)/(v'-v)] = t/\tau$$

de unde exponenţiind avem: $\Rightarrow (v'+v)/(v'-v) = e^{t/\tau}$

Rearanjând obţinem: $\Rightarrow v(t) = v'\,(e^{t/\tau}-1)/(e^{t/\tau}+1)$

sau după amplificare cu $e^{-t/\tau}$ $\Rightarrow v(t) = v'\cdot(1-e^{-t/\tau})/(1+e^{-t/\tau})$

Această relaţie pentru viteză este similară cu cea de la problema anterioară, implicit comportarea mobilului va avea similitudini cu mişcarea sub acţiunea frânării proporţionale cu viteza.

Ştiind că:

$e^{-1} = 0{,}368$ ; $1-e^{-1} = 0{,}632 = 63\%$ ; $1+e^{-1} = 1{,}3678$
$e^{-2} = 0{,}135$ ; $1-e^{-2} = 0{,}864 = 86\%$ ; $1+e^{-2} = 1{,}135$
$e^{-3} = 0{,}049$ ; $1-e^{-3} = 0{,}950 = 95\%$ ; $1+e^{-3} = 1{,}049$
$e^{-4} = 0{,}018$ ; $1-e^{-4} = 0{,}982 = 98\%$ ; $1+e^{-4} = 1{,}018$

similar cu problema precedentă tragem concluzia că după 3 constante de timp $\tau$, mobilul atinge practic viteza sa limită v', mişcându-se în continuare uniform.

Acestă forţă de frânare este caracteristică mişcării obiectelor cu viteză mare într-un fluid, de exemplu autovehiculele în aer şi avioanele. Presiunea dinamică ce acţionează asupra secţiunii mobilului, transversale pe direcţia de curgere a fluidului:

$$p_{din} = \rho\cdot v^2/2$$

unde: $\rho$ –densitatea fluidului, 1,29 kg/m$^3$ pentru aer la 0°C,
$v$ –viteza relativă fluid-solid,

crează forța de frânare:

$$F_r = K \cdot S \cdot \rho \cdot v^2/2$$

unde S este secțiunea mobilului *transversală* (perpendiculară) pe direcția de curgere, iar K este *coeficientul aerodinamic* ce depinde de forma obiectului:

| | | |
|---|---|---|
| K = 1,2 | => ) | semisferă concavă |
| K = 1 | => \| | plan |
| K = 0,4 | => O | sferă |
| K = 0,3 | => ( | semisferă convexă |
| K = 0,2 | => <⊃ | "glonț" |
| K = 0,04 | => ⊂> | "picătură", profil aripă de avion |

## Mişcarea circulară în câmp gravitațional

Forța care menține corpul pe o traiectorie circulară este:

$$F = m\, a_{cp} = m\, v^2/r$$

Un sistem de referință legat de corpul care se mişcă uniform pe o traiectorie circulară este un *sistem de referință neinerțial*. Adică asupra unui corp de masă m acționează *forța de inerție* "$m \cdot a_{cf}$", unde $a_{cf}$ este accelerația centrifugă, egală în modul dar de sens contrar cu accelerația centripetă:

$$a_{cf} = a_{cp} = \omega^2 r = v^2/r$$

În sistemul neinerțial propriu al corpului acesta este în echilibru, fiindcă asupra sa acționează *forța centripetă* care este echilibrată de *forța centrifugă*. Forța centripetă are un suport fizic, este tensiunea din fir (piatră pe care o rotim) sau forța gravitațională (satelit în jurul Pământului) sau forța coulombiană (electron rotindu-se în jurul nucleului). Forța centrifugă se manifestă doar în sistemul de referință neinerțial.

**Viteza şi altitudinea unui satelit geostaționar**.
În cazul unui satelit care gravitează în jurul Pământului se echilibrează forța de atracție gravitațională:

$$F = KMm/r^2.$$

unde:

$K = 6.674\times10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$. constanta gravitațională
$M_P = 5.98\times10^{24}$ kg masa Pământului
r = poziția satelitului față de centrul Pământului
m =masa satelitului.

cu forța centrifugă (inerțială)

$$F_{cf} = mv^2/r = m\omega^2 r = m(2\pi/T)^2 r$$

unde T este perioada mişcării, care pentru un satelit geostaționar este $T=24h=8{,}64\cdot10^4 s$.

$$KMm/r^2 = m(2\pi/T)^2 r \quad =>$$

$$r = [KMT^2/(4\pi^2)]^{1/3} =$$
$$=[6.67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\cdot8{,}64^2\cdot10^8/(39{,}4)]^{1/3} =$$
$$=[75{,}75\cdot10^{21}]^{1/3}. =>$$
$$r = 4{,}2312\cdot10^7 \text{ m}$$

Față de suprafața Pământului, poziția satelitului geostaționar va fi:

$$H = r - R_p = 42{,}312\cdot10^6 - 6.38\times10^6 \text{ m} = 35{,}93\cdot10^6 \text{ m} = 35'930 \text{ km}$$

Aflați perioda de revoluție şi viteza unui satelit care gravitează la 100 km deasupra suprafeței Pământului.

## Lucrul mecanic şi Puterea

***Lucrul mecanic*** elementar este produsul scalar între forță şi deplasarea elementară a punctului de aplicație a forței:

$$dL = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F\cdot ds\cdot\cos\alpha \qquad [L]_{SI} = N\cdot m = J \text{ (Joule)} \quad (1)$$

Unitatea de măsură pentru lucrul mecanic este Joule-ul, J. Lucrul mecanic total este integrala forței pe traiectoria descrisă de punctul material :

$$L = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \quad (2)$$

***Puterea*** este raportul dintre lucrul mecanic efectuat şi intervalul de timp în care a fost efectuat. La limita intervalelor de timp foarte mici puterea instantanee este derivata lucrului mecanic:

$$P = dL/dt \qquad [P]_{SI}=J/s= W \qquad (3)$$

Unitatea de măsură pentru putere este Watt-ul, W.

Ținând cont că: dL= $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, putem rescrie relația (20) pentru putere ca:

$$P= \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}/dt = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}.$$

o relație foarte utilă în multe aplicații. Această expresie ne spune că forța de tracțiune generată de motorul unui automobil este invers proporțională cu viteza instantanee a automobilului. Cu alte cuvinte capacitatea de a accelera a automobilului scade puternic la viteze mari!

## Energia

### *Energia cinetică*

Folosindu-ne de relația (18) pentru lucrul mecanic elementar şi de legea forței (17) putem scrie:

$$dL = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = m\cdot(d\mathbf{v}/dt)\cdot d\mathbf{r} = m\cdot(d\mathbf{r}/dt)\cdot d\mathbf{v} = m\cdot\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v} = d(mv^2/2)$$

care prin integrare devine ***teorema variației energiei cinetice*** prin relația:

$$L = \Delta E_C = mv_2^2/2 - mv_1^2/2 \qquad (4)$$

unde energia cinetică a corpului este expresia:

$$E_C = mv^2/2 \qquad [E_c]_{SI}=J \qquad (5)$$

***Energia cinetică*** a unui corp măsoară lucrul mecanic acumulat de acel corp sub formă de mişcare datorită acțiunii forțelor exterioare. Unitatea de măsură pentru energie este aceeaşi cu cea a lucrului mecanic, Joule.

*Exemple*

**1**. Plecând din repaus, automobilul de masă "m" se mişcă fără frecare sub acțiunea motorului care furnizează puterea constantă "P". Găsiți legea vitezei.

$$L= P\cdot t \quad mv^2/2 - 0 = P\cdot t \Rightarrow \qquad v = (2Pt/m)^{1/2} \ .$$

**2**. Acționează în plus o forță rezistentă $F_r$ constantă. Ştiind că P = F·v , legea forței devine:

$$m\cdot dv/dt = (P/v) - F_r \quad \Rightarrow \qquad (m/F_r)\cdot v\cdot dv/[(P/F_r)-v] = dt$$

$$\Rightarrow \qquad (m/F_r)[-1+(P/F_r)/(-v + P/F_r)]\cdot dv = dt$$

Integrând avem

$$t = (m/F_r)\{-v-(P/F_r) \ln[(-v+P/F_r)/(P/F_r)]\}$$

=>*Nu există formulă explicită* pentru v(t)!

Din ecuația inițială pentru forță vedem că accelerația scade cu creşterea vitezei, anulându-se pentru viteza limită $v' = P/F_r$ .

### *Energia potențială*

Câteva tipuri de forțe sunt mult utilizate în modelarea fenomenelor fizice. Aici alături de noțiunea de energie cinetică, apare noțiunea de energie potențială. ***Energia potențială*** a unui corp măsoară lucrul mecanic acumulat de acel corp datorită modificării poziției sale sau a părților sale unele față de altele sub acțiunea forțelor exterioare.

*Lucrul mecanic al forței gravitaționale de la suprafața Pământului* G=mg

$$L= \int mg\, dh = mg\,(h_{final}-h_{inițial})$$

Ridicând un corp de masă m de la nivelul H=0 la înălțimea "h" efectuăm un lucru mecanic:

$$L=mgh \qquad (6)$$

împotriva forței gravitaționale, lucru mecanic care este accumulat de corp sub formă de energie potențială.

*Lucrul mecanic al forței gravitaționale* $F = K\cdot m_1\cdot m_2 /r^2$:

$$L = \int (K\cdot m_1\cdot m_2 / r^2)\, dr = (K\cdot m_1\cdot m_2) \int (1/r^2)\, dr$$

$$L = (K\cdot m_1\cdot m_2)\cdot(-1/r)|_1^2 = (K\cdot m_1\cdot m_2)/r_1 - (K\cdot m_1\cdot m_2)/r_2$$

$V(r) = (Km)/r$ =>potențial gravitațional

$F = -m\cdot dV/d\mathbf{r} = -m\cdot \mathbf{grad}V = -m\cdot \nabla V$ => forță potențială.

unde gradientul potențialului este dat de relația:

$$\mathbf{grad}V = \nabla V = \mathbf{i}\, dV/dx + \mathbf{j}\, dV/dy + \mathbf{k}\, dV/dz$$

*Lucrul mecanic al forței elastice* $F = -k\cdot x$

$$L = \int (-k\cdot x)\, dx = -k\cdot x^2/2|_1^2 = -k\cdot x_1^2/2 + k\cdot x_2^2/2$$

$W = k\cdot x^2/2$ => energie potențială elastică (7)

Într-un câmp de forțe conservativ (forțe generate de un potențial) lucrul mecanic al forțelor câmpului este egal cu variația energiei potențiale cu semn schimbat:

$$L = -\Delta E_P$$

$$m\cdot g\cdot(h_1 - h_2) = m\cdot g\cdot h_1 - m\cdot g\cdot h_2 = E_{P1} - E_{P2}\ .$$

Dacă acest lucru mecanic se efectuează asupra unui corp, atunci variația energiei cinetice va fi:

$$L = \Delta E_C$$

Aceste două relații scăzute ne dau:

$\Delta E_C + \Delta E_P = 0$ care înseamnă: $E_C + E_P = \text{constant}$,

adică suma dintre energia cinetică şi potențială a sistemului rămâne constantă. Aceasta este tocmai ***legea conservării energiei mecanice***.

## *Probleme de mecanică*

1. Din Cluj către Dej pleacă un automobil cu viteza $v_a$ = 54 km/h şi simultan din Dej către Cluj un biciclist cu viteza $v_b$= 24km/h. La ce distanță de Cluj se întâlnesc? ($d_{Cj\text{-}Dj}$ = 60km)
2. Se aruncă vertical în sus cu $v_o$=10m/s un corp. La ce înălțime ajunge? În cât timp? După cât timp ajunge din nou în origine?
3. Se aruncă oblic $\alpha$=45° cu $v_o$=18m/s un corp. Calculați $h_{max}$ şi distanța maximă parcursă pe orizontală.
4. Mobil m=100kg alunecă plecând din repaus din vârful planului înclinat $\alpha$=30°, L=10m, $\mu$=0,1.
   a. Ce viteză are la baza planului?
   b. Ce distanță parcurge pe orizontală până la oprire?
5. Aruncăm de jos în sus pe plan înclinat $\alpha$=30°, un corp cu $v_o$=12m/s. Ce distanță parcurge pe plan până la oprire? ($\mu$=0,1)
6. Un corp de masă m=32 kg, cade liber sub acțiunea greutății (g=9,81 m/s$^2$). Aflați:
   a) legea spațiului;
   b) legea vitezei;
   c) lucrul mecanic efectuat în primele 3s;
   d) puterea primită de corp ca funcție de timp.
7. În cât timp accelerează un automobil cu masa 1000kg şi putere a motorului P=64CP (1CP=736W) de la v=0 la v=108km/h? [$L=\Delta E_C$, $P\cdot t = mv^2/2$]
8. Un corp se mişcă după legea vitezei: $v = 16\cdot t^3 - 24\cdot t + 5$ m/s Aflați:
   a) legea spațiului;
   b) legea accelerației;
   c) legea forței (m=22kg);
   d) legea puterii.
9. Se dau masa automobilului m =1 000 kg, randamentul motorului r=0,25, puterea calorică a benzinei q=46 MJ/kg, densitatea benzinei d = 0,9 kg/l. Pornind din repaus automobilul accelerează timp de 10 s până la viteza maximă v = 36 km/h, apoi se mişcă uniform timp de 3 min., iar în final frânează timp de 10 s până la oprire. Neglijând frecările calculați:
   a) lucrul mecanic efectuat;

b) câți litri de benzină consumă;
c) lucrul mecanic efectuat şi câți litri de benzină consumă dacă viteza maximă este 54 km/h, iar timpul cât se mişcă uniform 2 min.;
d) consumul zilnic de benzină pentru cele două variante dacă situația descrisă se repetă de 100 de ori pe zi;
e) spațiul parcurs zilnic în cele două variante.

10. Fir L=14m fixat în 2 puncte aflate la distanța L' =7m. De mijlocul firului atârnat corp m=80kg. Calculați forțele de reacție din fir şi din punctele de capăt.