Determinarea constantei elastice de torsiune şi a modulului transversal de elasticitate

Scopul lucrării:

Determinarea constantei elastice de torsiune şi a modulului transversal de elastricitate (modulul de torsiune) pentru un fir din oţel.

I. Consideraţii teoretice

Pentru determinarea constantei de torsiune şi a modulului transversal de elasticitate, folosim un pendul de torsiune format dintr-un fir elastic de care atârnă un disc (Fig. 1a). Rotim discul cu un unghi α şi îi dăm drumul. Discul va executa o mişcare de oscilaţie în plan orizontal. Scriem legea a doua a dinamicii din mişcarea de rotaţie:

$$I_0 \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M} \qquad (1)$$

unde I_0 este momentul de inerţie al sistemului în raport cu axa de rotaţie, $\varepsilon = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ este acceleraţia unghiulară, iar M este momentul cuplului de forţe care produce torsiunea (răsucirea). Dacă deformaţia se află în domeniul elastic, momentul cuplului de forţe care produce torsiunea este proporţional cu unghiul de torsiune, α:

$$M = -K \cdot \alpha \qquad (2)$$

unde K este constanta elastică de torsiune, a cărei valoare depinde de natura, forma şi dimensiunile corpului, precum şi de axa în raport cu care se efectuează torsiunea (Fig. 1b).

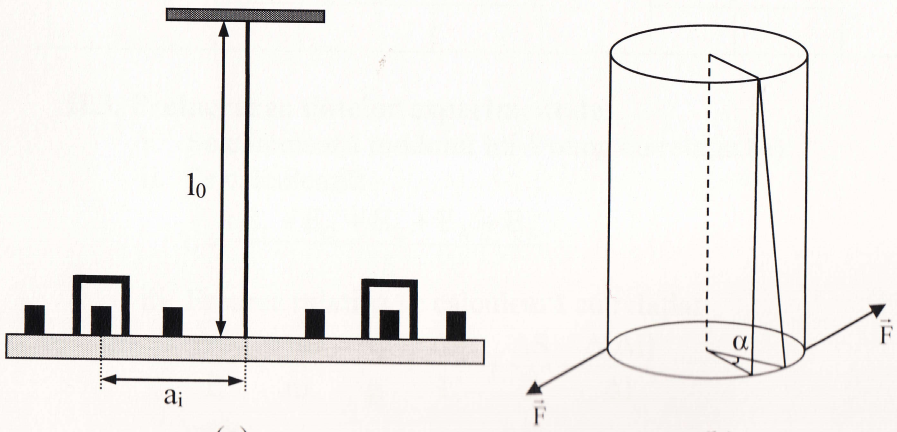

Fig. 1.

Din relaţiile (1) şi (2) se obţine ecuaţia diferenţială ce descri[e] mişcarea pendulului de torsiune:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{K}{I_0}\alpha = 0 \text{ sau } \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0 \qquad (3)$$

unde cu $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{I_0}}$ s-a notat pulsaţia proprie a pendulului de torsiune.

Integrând ecuaţia diferenţială (3) se obţine legea de mişcare:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (4)$$

unde $\alpha_0 = \alpha(0)$ este valoarea iniţială a elongaţiei unghiulare.

Perioada mişcării oscilatorii este dată de relaţia:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{K}} \qquad (5$$

Dacă punem pe discul pendulului două corpuri de mase egale, m dispuse simetric faţă de centrul firului metalic, la distanţa a_i faţă de axa d[e] rotaţie, atunci, conform teoremei lui Steiner, momentul de inerţie a[l] sistemului devine:

$$I_i = I_0 + 2 \cdot m \cdot a_i^2 \qquad (6$$

iar perioada de oscilaţie devine:

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2 \cdot m \cdot a_i^2}{K}} \qquad ($$

Eliminând momentul de inerţie I_0 între relaţiile (5) şi (7) se obţi[ne] constanta elastică de torsiune:

$$K = 8\pi^2 m \frac{a_i^2}{T_i^2 - T_0} \qquad ($$

Dacă punem pe discul pendulului două corpuri de mase egale [la] distanţa a_i, şi două corpuri de mase egale la distanţa a_j, atunci momentul [de] inerţie al sistemului devine:

$$I_{ij} = I_0 + 2 \cdot m \cdot a_i^2 + 2 \cdot m \cdot a_j^2 \qquad ($$

iar constanta elastică de torsiune este dată de relaţia:

$$K = 8\pi^2 m \frac{a_i^2 + a_j^2}{T_{ij}^2 - T_0} \qquad (1$$

unde T_{ij} este perioada de oscilaţie în prezenţa celor patru corpuri.

Modulul transversal de elasticitate (modulul de torsiune) [al] materialului din care este confecţionat firul se poate calcula cu ajuto[rul] relaţiei:

$$G = \frac{32 \cdot l_0 \cdot K}{\pi \cdot d^4} \qquad (11)$$

unde l_0 este lungimea firului.

II. Metodica experimentală

II.1. Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental utilizat constă dintr-un stativ (S), firul de studiat (F), şi discul (D) pe al cărui diametru sunt fixate, în mod simetric faţă de axa de simetrie, câte trei ştifturi (Fig. 2). Aceste ştifturi servesc la fixarea corpurilor de masă m la diferite distanţe a_i faţă de axa de rotaţie.

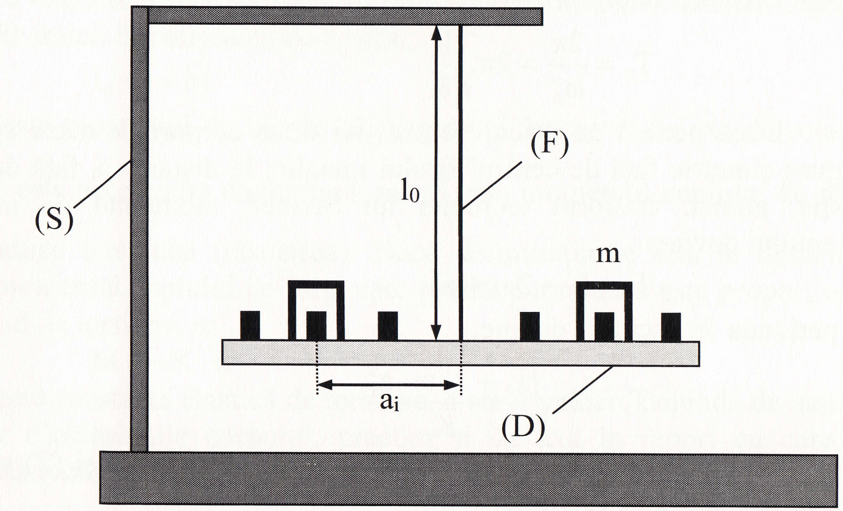

Fig. 2.

II.2. Modul de lucru

i. Se măsoară lungimea iniţială l_0 şi diametrul d ale firului metalic;

ii. Se cântăresc corpurile de masă m;

iii. Se roteşte discul cu aproximativ 30° şi se lasă să oscileze, astfel încât firul să nu execute mişcări pendulare şi discul să nu balanseze;

iv. Se cronometrează timpul t_0 în care sistemul efectuează un număr n_0 = 20 de oscilaţii şi se determină perioada T_0 cu ajutorul relaţiei $T_0 = t_0/n_0$;

v. Se aşează două corpuri de masă m de o parte şi de alta a centrului discului, la distanţa a_i faţă de axa de rotaţie, şi se pune sistemul în oscilaţie;

vi. Se cronometrează timpul t_i în care sistemul efectuează un număr n_i = 20 de oscilaţii şi se determină perioada T cu ajutorul relaţiei $T_i = t_i/n_i$;

vii. Se repetă aceeaşi operaţie pentru alte valori ale distanţei a_i. Datele obţinute se trec în tabelele 1 şi 2.

viii. Se pun patru greutăţi, două la distanţa a_i şi două la distanţa a_j, şi se determină perioada T_{ij}. Se repetă aceeaşi operaţie pentru alte valori ale distanţelor a_i şi a_j.

ix. Datele obţinute se introduc în tabelele 3 şi 4.

Tabelul 1.

t_0 (s)	T_0 (s)	a_i (m)	t_i (s)	T_i (s)	K (N·m)	$\overline{K}$ (N·m)	ΔK/K (%)	ΔK (N·m)	$\Delta\overline{K}$ (N·m)

Tabelul 2.

l_0 (m)	d (m)	K (N·m)	G (N·m^{-2})	$\overline{G}$ (N·m^{-2})	ΔG/G (%)	ΔG (N·m)	$\Delta\overline{G}$ (N·m)

Tabelul 3.

t_0 (s)	T_0 (s)	a_i (m)	a_j (m)	t_{ij} (s)	T_{ij} (s)	K (N·m)	$\overline{K}$ (N·m)	ΔK/K (%)	ΔK (N·m)	$\Delta\overline{K}$ (N·m)

Tabelul 4.

l_0 (m)	d (m)	K (N·m)	G (N·m^{-2})	$\overline{G}$ (N·m^{-2})	ΔG/G (%)	ΔG (N·m)	$\Delta\overline{G}$ (N·m)

II.3. Prelucrarea datelor experimentale

i. Se calculează constanta de torsiune cu relaţiile (8) şi (10);

ii. Se calculează:

$$\overline{K} = \frac{K_1 + K_2 + K_3}{3} \tag{12}$$

iii. Eroarea relativă se calculează cu relaţia:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2\frac{\Delta a_i}{a_i} + 2\frac{T_i \cdot \Delta T_i + T_0 \cdot \Delta T_0}{T_i^2 - T_0^2} \tag{13}$$

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2\frac{\Delta a_i}{a_i} 2\frac{\Delta a_j}{a_j} + 2\frac{T_{ij} \cdot \Delta T_{ij} + T_0 \cdot \Delta T_0}{T_{ij}^2 - T_0^2} \tag{14}$$

unde:

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta t_0}{t_0} + \frac{\Delta n_0}{n_0}; \frac{\Delta T_i}{T_i} = \frac{\Delta t_i}{t_i} + \frac{\Delta n_i}{n_i}; \frac{\Delta T_{ij}}{T_{ij}} = \frac{\Delta t_{ij}}{t_{ij}} + \frac{\Delta n_{ij}}{n_{ij}} \tag{15}$$

iv. Se calculează $\Delta K = a \cdot K$, deoarece $\frac{\Delta K}{K} = a$;

v. Se calculează:

$$\Delta\overline{K} = \frac{\Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta K_3}{3} \tag{16}$$

vi. Rezultatele obţinute se trec în tabelele 1 şi 3;

vii. Rezultatul final se scrie sub forma:

$$K = \overline{K} \pm \Delta\overline{K} \ (N{\cdot}m) \tag{17}$$

viii. Se calculează modulul de torsiune cu relaţia (11);

ix. Se calculează:

$$\overline{G} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{3} \tag{18}$$

x. Eroarea relativă se calculează cu relaţia:

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l_0}{l_0} + 4\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta K}{K} \tag{19}$$

xi. Se calculează $\Delta G = a \cdot G$, deoarece $\frac{\Delta G}{G} = a$;

xii. Se calculează:

$$\Delta\overline{G} = \frac{\Delta G_1 + \Delta G_2 + \Delta G_3}{3} \tag{21}$$

xiii. Rezultatele obţinute se introduc în tabelele 2 şi 4;

xiv. Rezultatul final se scrie sub forma:

$$G = \overline{G} \pm \Delta\overline{G} \ (N{\cdot}m^{-2}) \tag{22}$$