

STUDIUL UNDELOR STAȚIONARE TRANSVERSALE ÎN CORZILE VIBRANTE

1. Scopul lucrării

Scopul acestei lucrări este de-a evidenția modurile (fundamental și armonicile superioare) de vibrație ale undelor staționare transversale în corzi vibrante; de a calcula lungimile de undă și frecvențele corespunzătoare acestor moduri de vibrație și de a observa relațiile care există între ele.

2. Considerații teoretice

Prin termenul de undă elastică se înțelege, fenomenul de propagare a perturbațiilor produse de un punct material într-un mediu elastic. În funcție de traiectoria pe care o descriu particulele în mișcare, sau în funcție de direcția de oscilație a particulelor mediului în raport cu direcția de propagare a undei se disting undele longitudinale, transversale și superficiale.

Undele transversale sunt undele pentru care direcția de oscilație a particulelor mediului este perpendiculară pe direcția de propagare, fiind posibile numai în mediile solide elastice uni- și bi-dimensionale și la suprafața lichidelor. În cazul unor medii unidimensionale sub formă de corzi (fire elastice cu secțiune constantă) ecuația diferențială ce descrie propagarea undelor transversale este:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (1)$$

unde

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (2)$$

reprezintă viteza frontului de undă, excitat în coarda supusă unei tensiuni T și având o densitate liniară $\mu = \frac{m}{l}$. Soluția generală a acestei ecuații este de forma:

$$\Psi(x, t) = \Psi_p \left(t - \frac{x}{v} \right) + \Psi_r \left(t + \frac{x}{v} \right) \quad (3)$$

care ne arată că în coardă pot apărea atât unde progresive cât și unde regresive, fiind caracteristică mediilor finite cum este și coarda vibrantă fixă la capete. Considerăm că oscilațiile sunt armonice iar funcțiile de undă care descriu propagarea undei progresive și a undei regresive sunt:

$$\begin{aligned}\Psi_p &= a \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = a \cdot \sin(\omega t - kx) \\ \Psi_r &= a \cdot \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)\right] = a \cdot \sin(\omega t + kx + \pi)\end{aligned}\quad (4)$$

Interferența acestor unde va da naștere, în coardă, unor unde numite unde staționare descrise de ecuația:

$$\Psi = \Psi_p + \Psi_r = 2a \cdot \sin(kx) \cdot \cos(\omega t) \quad (5)$$

care este ecuația undelor staționare sau a modurilor de vibrație într-o coardă.

Conform ecuației (5) fiecare punct al mediului execută o oscilație de amplitudine constantă în timp, dar fiind distribuită în spațiu, după relația $A(x) = 2a \cdot \sin(kx)$. Valorile minime ale amplitudinii se obțin în anumite puncte numite noduri, care satisfac condiția $A = 0$, adică $kx = n\pi$ de unde se obțin:

$$x_n^{\min} = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2} = 2n \frac{\lambda}{4} \quad \text{unde } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

unde vectorul de undă $k = 2\pi/\lambda$. Valorile de amplitudine maximă, numite ventre, satisfac condiția $A = \pm 2a$, adică $k \cdot x = (2n + 1)\pi/2$:

$$x = (2n + 1) \frac{\pi}{2k} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{unde } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Energia undelor staționare neputându-se transmite, teoretic, prin noduri rămâne localizată. Deoarece coarda este fixă, la capete vor exista noduri, iar lungimea corzii L și lungimea de undă, λ , sunt legate prin relația,

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad \text{unde } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Ținând cont și de viteza undelor transmise prin coardă, rezultă că undele staționare sau modurile de vibrație ale corzii, pot avea numai anumite frecvențe, cunoscute prin relația,

$$v_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = n v_1 \quad \text{unde } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Pentru $n=1$ se obține frecvența fundamentală, v_1 , careia îi corespunde modul fundamental de vibrație (armonica fundamentală) iar pentru celelalte valori ale lui n se obțin armonicile superioare (vezi Fig. 1). Valorile frecvențelor

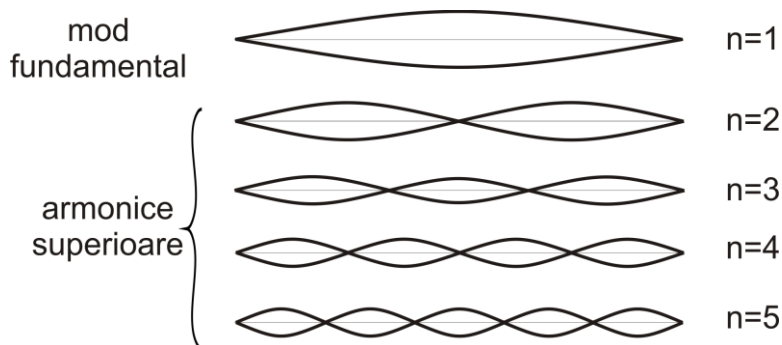


Figura.1

pentru care coarda vibrează în regim staționar alcătuiesc spectrul discret ca valori proprii de vibrație, sau rezonanțe, ale corzii.

3. Aplicații

Undele staționare se regăsesc cel mai frecvent în instrumente muzicale cu corzi (aici vibrația este produsă cu un arcuș, prin ciupire sau prin lovire). Astfel, sunetul slab și fără muzicalitate al vibratorului este amplificat și îmbogățit cu frecvențele de rezonanță, al căror spectru creează timbrul specific fiecărui instrument. În final, ia naștere și se propagă o undă sonoră care creează un sistem de unde staționare.

În funcție de mediul de propagare, undele staționare pot fi uni-, bi- sau tridimensionale, ca de exemplu: i) pentru o dimensiune avem: coarda vibrantă, tubul sonor; ii) pentru două dimensiuni avem: cutia de rezonanță a instrumentelor muzicale, suprafața unui lichid, membrana unei tobe; iii) pentru trei dimensiuni avem interiorul unei încăperi, etc.

4. Metodica experimentală

4.1 Montajul experimental

Dispozitivul experimental prezentat în figura 2 este format dintr-un suport de lemn (1) pe care este întins un fir de sârmă dintr-un material nemagnetic (2) având un capăt fixat în partea dreaptă, iar celalalt trecut peste un scripete fix (3). De acest capăt (3) se atârână două greutăți cu mase diferite, G (4), pentru a se tensiona (întinde) în mod diferit coarda ($\vec{T} = \vec{G}$), și pentru a observa modurile de

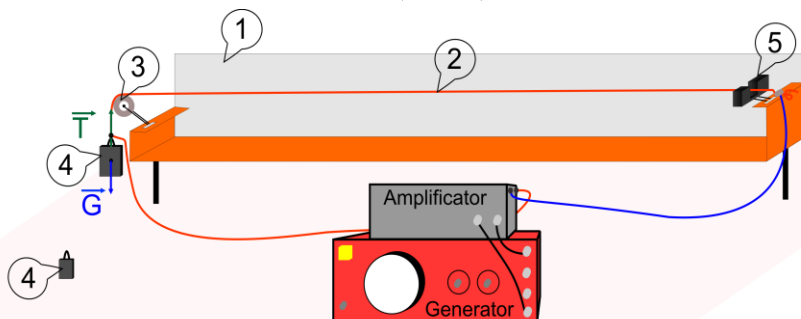


Figura 2.

vibrație al undelor transversale.

Prin fir va trece un curent de audio-frecvență provenit de la un generator care permite reglarea frecvenței și nivelul curentului. În urma interacțiunii ($F = B \cdot I \cdot L$) dintre curentul ce trece prin fir și câmpul magnetic constant produs de magnetul permanent (5) se realizează excitarea corzii. Înainte de a fi introdus în coardă semnalul audio este amplificat.

4.2 Modul de lucru

1. Se atâră un corp de greutate cunoscută $G = mg$, la capătul corzii, pentru a produce tensionarea ei ($T = mg$);
2. Se pune în stare de funcționare generatorul de semnal și amplificatorul de putere;
3. Se modifică frecvența de excitare a corzii rotind butonul pentru selectarea frecvenței până se constată că în coardă se induce un regim evident de unde staționare;
4. Se citesc frecvențele corespunzătoare modului fundamental precum și cele corespunzătoare primelor 4 armonice superioare;
5. Se repetă aceleași măsurători pentru două corpuri atârinate la capătul corzii (pentru alte tensiuni din coardă).
6. Se consideră masa redusă $\mu = 1.25 \pm 0.01 \text{ g/m}$; $\varphi = 0.45 \text{ mm}$; $L = 1 \text{ m}$.

Tabelul 1

m [kg]	$T = mg$ [N]	$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ [m/s]	v_n [Hz]	1	2	3	4	5	λ_n [m]	1	2	3	4	5
			v_{calc}						λ_{calc}					
			v_{exp}						λ_{exp}					
			v_{calc}						λ_{calc}					
			v_{exp}						λ_{exp}					

4.3 Prelucrarea datelor experimentale

1. Se calculează viteza de propagare a undelor transversale prin coardă folosind relația (2);
2. Se calculează frecvența undelor transversale induse în coardă cu ajutorul relației (9) pentru modul fundamental de vibrație și pentru primele patru armonice superioare ($n=1, 2, 3, 4, 5$). Se compară datele obținute, cu cele citite pe generatorul de frecvențe;

3. Se calculează lungimile de undă λ_n ale undelor de frecvențe ν_n corespunzătoare modurilor de vibrație rezonante în coardă folosind relația (8), și se compară cu valorile care pot fi aflate direct prin măsurarea distanței dintre două noduri succesive, ținând cont că acestea reprezintă $\lambda/2$.
4. Se completează tabelul 1.