Câmpul electromagnetic. Unde electromagnetice

Din studiul fenomenelor de inducţie electromagnetică şi de inducţie magnetoelectrică rezultă că câmpul electric şi câmpul magnetic coexista simultan în spaţiu şi se generează reciproc.

*Definiţie: Ansamblul câmpurilor electric şi magnetic, care oscilează şi se generează reciproc, se numeşte **câmp electromagnetic**.*

Câmpurile electrice şi magnetice din apropierea dipolului oscilant se numesc ***câmpuri electrice şi magnetice primare*** şi au ca surse sarcinile electrice aflate în mişcare accelerată, sau cu alte cuvinte, curenţii electrici variabili în timp. Câmpurile electrice şi magnetice în punctele depărtate de dipolul oscilant se numesc ***câmpuri electrice şi magnetice secundare*** şi nu mai au ca surse sarcinile electrice accelerate sau curenţii electrici variabili în timp, ci se generează reciproc şi se propagă în spaţiu din aproape în aproape.

*Definiţie: Perturbaţia electromagnetică câmpul electromagnetic care se propagă în spaţiu constituie o **undă electromagnetică**.*

Spre deosebire de câmpurile electrice şi magnetice primare care sunt defazate cu T/4 în timp şi $\lambda/4$ în spaţiu câmpurile electrice şi magnetice care constituie unda electromagnetică oscilează în fază în orice punct din spaţiul în care se propaga. Mai mult, faţă de undele elastice care se propagă numai în medii elastice, undele electromagnetice se propagă şi în vid.

Ecuaţia undelor plane sinusoidale

Să considerăm o undă electromagnetică care se propagă în direcţia Ox care î-şi are sursa în punctul O. Câmpurile electric şi magnetic într-un punct A de pe axa Ox sunt, $\vec{E}(x,0,0,t)$ şi respectiv $\vec{B}(x,0,0,t)$. Dacă *t*' este timpul necesar pentru unda electromagnetică să se propage de la sursa (O) până în punctul A atunci:

$$x = c \cdot t'. \tag{1}$$

Perturbaţia care ajunge în punctul A la momentul de timp, *t* este aceea care a plecat de la sursă la momentul de timp *t* – *t*'. Atunci valorile instantanee ale câmpurilor electric şi magnetic în punctul A la momentul de timp *t* sunt:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,t) &= \vec{E}_m \cdot \sin[\omega(t-t')] \\ \vec{B}(x,t) &= \vec{B}_m \cdot \sin[\omega(t-t')], \end{aligned} \tag{2}$$

sau înlocuind timpul de propagare a undei:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(x,t) &= \vec{E}_m \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \\ \vec{B}(x,t) &= \vec{B}_m \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\end{aligned}}, \tag{3}$$

pentru distanţe relativ mari de sursa de oscilaţie. Folosindu-ne de binecunoscutele relaţii:

$$\boxed{\begin{aligned}&\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \\ &\lambda = \frac{c}{\nu} = cT \\ &k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}\end{aligned}}, \tag{4}$$

ecuaţiile (16.3) se pot rescrie ca:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,t) &= \vec{E}_m \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \\ \vec{B}(x,t) &= \vec{B}_m \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]\end{aligned}, \tag{5}$$

sau

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,t) &= \vec{E}_m \cdot \sin[\omega t - kx] \\ \vec{B}(x,t) &= \vec{B}_m \cdot \sin[\omega t - kx]\end{aligned}, \tag{6}$$

sau pentru o direcţie arbitrară de propagare descrisă de vectorul de undă $\vec{k} = k \cdot \vec{n}$ şi care se afla la distanta $\vec{r}$ de sursa, avem:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,t) &= \vec{E}_m \cdot \sin\left[\omega t - \vec{k}\vec{r}\right] \\ \vec{B}(x,t) &= \vec{B}_m \cdot \sin\left[\omega t - \vec{k}\vec{r}\right]\end{aligned}. \tag{7}$$

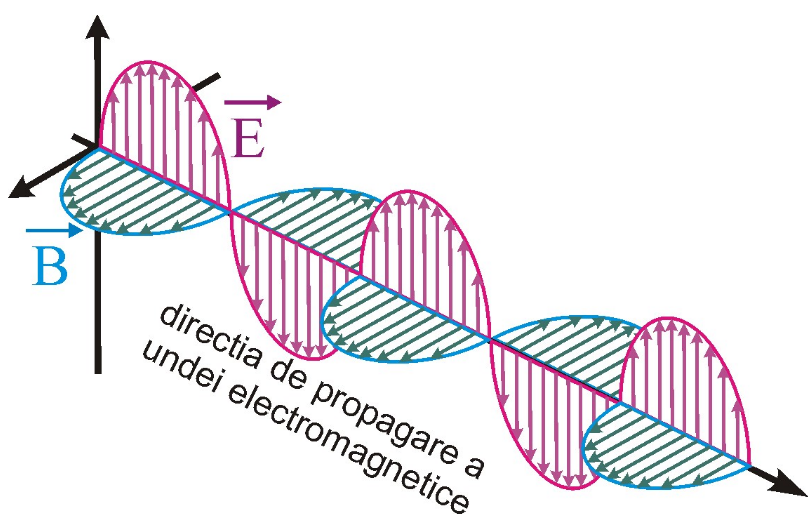

Fig. 1 Orientarea relativa a câmpului electric şi magnetic într-o undă electromagnetică.

Ecuaţia de propagare a undelor electromagnetice

Ecuaţiile (7) sunt soluţiile unei ecuaţii diferenţiale de ordin doi care poarta numele de ecuaţia de propagare a undelor electromagnetice şi care are aceeaşi formă generală cu oricare undă mecanică. Pentru a stabili aceasta ecuaţie vom calcula derivata de ordin doi a câmpului electric în raport cu timpul şi în raport cu spaţiul:

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = \omega E_m \cos(\omega t - kx) \quad \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 E_m \sin(\omega t - kx), \tag{8}$$

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -kE_m \cos(\omega t - kx) \quad \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 E_m \sin(\omega t - kx), \tag{9}$$

dar se din ecuaţiile (4) că $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ se obţine:

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}, \tag{10}$$

care împreună cu ecuaţia pentru câmpul magnetic:

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2}, \tag{11}$$

formează ecuaţiile de propagare a câmpului electromagnetic.

Ecuaţiile lui Maxwell fara surse

Scopul nostru este sa determinăm relaţia dintre vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ din undele electromagnetice şi viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid pentru a satisface ecuaţiile lui Maxwell. Fără a pierde din generalitate putem considera că $\vec{B}(0,0,B_z)$. Legea lui Ampère forma diferenţiala este:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{12}$$

Dacă suntem departe de sursa de oscilaţie atunci putem considera că câmpul electromagnetic se generează deja din aproape în aproape şi deci sursele pot sa fie neglijate:

$$\boxed{I = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = 0}. \tag{13}$$

Legea lui Ampere forma diferenţială fără surse este:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}, \tag{14}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}, \tag{15}$$

aplicând rotorul asupra ecuaţiei (15) obţinem:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)=\nabla\times\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(\nabla\times\vec{E}\right)}{\partial t}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}. \tag{16}$$

Rotorul câmpului magnetic $\vec{B}$ este:

$$\nabla\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & B_z\end{vmatrix}=\frac{\partial B_z}{\partial y}\cdot\vec{i}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\cdot\vec{j}=-\frac{\partial B_z}{\partial x}\cdot\vec{j}. \tag{17}$$

Prin aplicarea a doua oară a rotorului obţinem:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & -\frac{\partial B_z}{\partial x} & 0\end{vmatrix}=\frac{\partial^2 B_z}{\partial x\partial z}\cdot\vec{i}-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\cdot\vec{k}=-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\cdot\vec{k}, \tag{18}$$

de unde se poate scrie că:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)=-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\cdot\vec{k}=-\nabla^2\vec{B}. \tag{19}$$

Prin combinarea ecuaţiilor (19) şi (19) se obţine:

$$\nabla^2\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \tag{19}$$

care combinată cu ecuaţia (11) observam că:

$$\boxed{\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{c^2}}, \tag{20}$$

sau:

$$\boxed{c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=2.9979246\cdot10^8\ \frac{m}{s}}, \tag{21}$$

care este viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid.

Definiţie: Undele electromagnetice se propagă în vid cu viteza cu care se propagă lumina în vid.

Lumina este de natură electromagnetică, şi poate fi considerată ca o suprapunere de unde electromagnetice cu lungimi de undă cuprinse într-un interval determinat.

Ţinând cont de ecuaţiile (16.7) şi (16.17) se obţine:

$$\nabla\times\vec{B}=-\frac{\partial B_z}{\partial x}\cdot\vec{j}=\frac{\omega}{c}B_{z,m}\cos(\omega t-kx)\cdot\vec{j}, \tag{22}$$

şi

$$\frac{\partial\vec{E}(x,t)}{\partial t}=\omega\vec{E}_m\cos(\omega t-kx), \tag{23}$$

şi considerând legea lui Ampere:

$$\frac{\omega}{c} B_{z,m} \vec{j} = \frac{1}{c^2} \vec{E}_m , \tag{24}$$

de unde se pot trage două concluzii. Prima dintre ele este aceea că dacă unda electromagnetică se propagă în direcţia *x* iar câmpul magnetic oscilează în direcţia *z* atunci câmpul electric aste orientat în direcţia *y*. Deci câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt perpendiculare unul pe celălalt şi amândouă sunt perpendiculare pe direcţia de propagare a câmpului electromagnetic. A concluzie este legată de valorile maxime ale câmpurilor electrice şi magnetice:

$$\boxed{E_m = c \cdot B_m} . \tag{25}$$